

# Controlli di collisione per Raytracing e Collision Detection

Paolo Medici  
Lost One's Land Project ©2002-2004

6 aprile 2004



# Indice

<b>1</b>	<b>Controlli di collisione con parallelepipedi</b>	<b>1</b>
1.1	Ray Casting . . . . .	3
1.2	Collisioni con superfici mobili . . . . .	5
<b>2</b>	<b>collisioni con sfere</b>	<b>7</b>
2.1	Ray Casting . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Intersezioni con piani generici</b>	<b>11</b>
3.1	Intersezioni tra una sfera e un piano . . . . .	11
3.2	Ricavare i parametri caratteristici di un piano . . . . .	12
3.3	Intersezioni con un triangolo (o un quadrato) . . . . .	13
<b>A</b>	<b>Matrice inversa</b>	<b>15</b>
<b>B</b>	<b>Prodotto vettoriale</b>	<b>17</b>



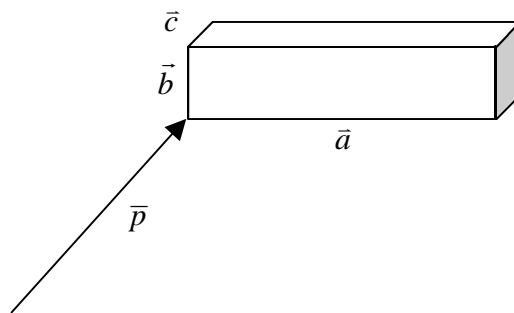
# Capitolo 1

## Controlli di collisione con parallelepipedi

All'interno del nostro spazio abbiamo il parallelepipedo di cui vogliamo valutare le collisioni. In generale un parallelepipedo si può costruire da 4 vettori: uno che punta un vertice, e gli altri 3 che indicano i lati uscenti da tale vertice.

È cosa comoda, piuttosto che memorizzare i vettori generatori del parallelepipedo (un oggetto chiamato *OBB* Oriented Bounding Box), memorizzare piuttosto una matrice di trasformazione che converte le coordinate dello spazio in quelle di un cubo allineato con gli assi (*AABB* Axis Aligned Bounding Box) di dimensione unitaria.

La configurazione del mondo è la seguente:



abbiamo il parallelogramma, creato lungo i vettori  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  e spostato dall'origine del sistema attraverso un vettore  $\vec{p}$ .

Immaginiamo inizialmente che  $\vec{p} = 0$  per comodità, e valutiamo la trasformazione  $T$  soluzione del sistema:

$$\begin{cases} T \cdot \vec{a} = \vec{e}_0 \\ T \cdot \vec{b} = \vec{e}_1 \\ T \cdot \vec{c} = \vec{e}_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

## 2 CAPITOLO 1. CONTROLLI DI COLLISIONE CON PARALLELEPIPEDI

dove i vettori  $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2$  sono i vettori base del nostro spazio vettoriale (dunque  $e_0 = (1, 0, 0)$ , etc.).

Per la proprietà della moltiplicazione tra matrici, il sistema 1.1 si può riscrivere come

$$T \cdot [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = [\vec{e}_0 \ \vec{e}_1 \ \vec{e}_2] \quad (1.2)$$

e di conseguenza

$$T = [\vec{e}_0 \ \vec{e}_1 \ \vec{e}_2] \cdot [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]^{-1} \quad (1.3)$$

La matrice  $[e_0 \ e_1 \ e_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  è la matrice identità e come tale si può semplificare.

La trasformazione 1.3, che trasforma il parallelepipedo in cubo unitario, si scrive semplicemente come

$$T = [a \ b \ c]^{-1} \quad (1.4)$$

trasformazione che si può ottenere, per esempio, attraverso la nota espressione della matrice inversa

$$T = [a \ b \ c]^{-1} = \frac{\text{agg}[a \ b \ c]}{\text{det}[a \ b \ c]}$$

Sul calcolo della matrice inversa è comunque dedicata l'appendice A.

Questo conto (computazionalmente pesante), nel caso che il parallelepipedo, di cui vogliamo calcolare le collisioni, sia statico nel mondo, è necessario eseguirlo comunque solo una volta, in fase di salvataggio, o caricamento dal disco, visto che poi si andranno solo ad utilizzare per ogni confronto la sola matrice  $T$  e il vettore  $\vec{p}$ .

Infatti, usando una notazione canonica per questa trasformazione, è possibile passare con 9 moltiplicazioni e 9 somme da uno spazio a un altro dove i confronti sono più immediati:

$$\vec{z}' = T \cdot (\vec{x} - \vec{p}) \quad (1.5)$$

L'espressione 1.5 si può scrivere, esplicitando i vettori, e definendo  $\vec{z} = \vec{x} - \vec{p}$ , come:

$$\begin{cases} z'_0 = t_{00}z_0 + t_{01}z_1 + t_{02}z_2 \\ z'_1 = t_{10}z_0 + t_{11}z_1 + t_{12}z_2 \\ z'_2 = t_{20}z_0 + t_{21}z_1 + t_{22}z_2 \end{cases} \quad (1.6)$$

In questo modo, è facile verificare la presenza del punto  $\vec{x}$  all'interno del parallelepipedo, verificando che  $\vec{z}'$  sia interno al cubo, ovvero che tutte le sue componenti siano comprese tra 0 e 1.

Ovviamente ci possono essere varianti, per esempio, se  $\vec{p}$  punta al centro del cubo, i valori compresi saranno tra  $-\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{2}$ .

Per risparmiare spazio nel salvataggio si può infine limitare l'analisi non a parallelepipedi generici, ma a parallelepipedi rettangoli, i quali sono creati univocamente sia da 3 vettori ortogonali (9 valori), ma anche da 3 angoli e le 3 norme dei vettori (6 valori). In ogni caso, data la presenza del vettore  $\vec{p}$ , non è c'è risparmio di spazio rilevante, e con parallelepipedi generici è possibile costruire Bounding Box particolari.

Il peso dei calcoli, per calcolare se c'è collisione, è 9 moltiplicazioni  
9 somme  
6 confronti

## 1.1 Ray Casting

Altre volte, piuttosto che verificare che tratto per tratto  $x$  sia interno o esterno a un cubo, è utile, se non necessario, conoscere quanto dista, rispetto a  $\vec{x}$ , una faccia del cubo, per verificare che uno spostamento successivo non intersechi, anche se parzialmente la bounding box.

Il nostro vettore dunque genera una retta di equazione:

$$\vec{y} = \vec{x} + t\vec{v} \quad (1.7)$$

dove  $\vec{v}$  è il vettore velocità e  $t$  è un fattore di scala (per esempio il tempo) che vogliamo ricavare. Per ipotesi  $t \geq 0$ .

In generale si può considerare anche un vettore  $\hat{d}$ , vettore direzione di norma unitaria, e uno scalare  $v$  che indica la velocità assoluta. In questo modo la 1.7 si può scrivere come:

$$\vec{y} = \vec{x} + tv\hat{d} \quad (1.8)$$

Usando l'equazione del raggio 1.7 dentro la formula di trasformazione 1.5 e definendo sempre  $\vec{z} = \vec{x} - \vec{p}$ , si ottiene il punto di arrivo  $\vec{r}$  nello spazio trasformato, che si può scrivere come:

$$\vec{r} = T \cdot (\vec{y} - \vec{p}) = T \cdot \vec{z} + t(T \cdot \vec{v}) \quad (1.9)$$

Applicando le trasformazioni separatamente ai due vettori:

$$\vec{r} = \vec{z}' + t\vec{v}' \quad (1.10)$$

#### 4 CAPITOLO 1. CONTROLLI DI COLLISIONE CON PARALLELEPIPEDI

dove  $\vec{z}'$  e  $\vec{v}'$  sono nello spazio trasformato del cubo unitario.

Da questa equazione si può ricavarne una prima soluzione del sistema, per esempio, fissando una per una le facce del cubo e verificando la collisione con essa. Questa soluzione richiede di conoscere la matrice  $T$ .

Si possono fare le seguenti considerazioni:

- il cubo, nel suo spazio, ha la proprietà di essere quella parte dello spazio  $\mathbb{R}^3$  compresa tra 0 e 1;
- a  $t = 0$  si presuppone che  $\vec{x}$  sia esterno al cubo, ovvero  $z'_i \notin [0 \dots 1], \forall i = \{0, 1, 2\}$ ;
- per ipotesi,  $t \geq 0$ .

Con queste considerazioni, se proiettiamo l'equazione 1.10, lungo ogni asse  $i$ , sussistono 2 eventi mutuamente esclusivi:

1. se  $z'_i > 1$  allora l'intersezione avviene solo se  $v'_i < 0$ . Se c'è intersezione allora la formula risolutiva è  $t^* = \frac{1-z'_i}{v'_i}$ . Se  $v'_i$  fosse stata positiva seguirebbe un  $t$  negativo (si può perciò testare, per esempio, che  $t$  sia positivo invece che  $v_i$  negativo).
2. se  $z'_i < 0$  allora l'intersezione avviene solo se  $v'_i > 0$ . Se c'è intersezione allora la formula risolutiva è  $t^* = -\frac{z'_i}{v'_i}$  (anche in questo caso valgono le considerazioni sulla positività di  $t$ ).

così per verificare che non ci sia collisione sicura sono sufficienti solo 6 confronti.

La soluzione vera è quella, ovviamente, con il  $t$  inferiore e si individua così la faccia con cui è avvenuta la collisione nel cubo.

In questo modo il sistema è altamente parallelizzabile (SIMD), visto che nei conti intervengono i 3 assi in maniera indipendente, e la differenza tra i punti 1 e 2 sta solo in una costante additiva che va aggiunta a  $t$ .

Il peso di ricavare  $t$  è

18 moltiplicazioni

18 somme

3 divisioni

6 confronti

Nota:  $\vec{r}$ , che si ottiene dalla 1.10, è nello spazio del cubo unitario, mentre a volte è necessario conoscerlo nello spazio reale. In questo caso non è necessario conoscere (salvata su disco, se non ricalcolata) la matrice  $T^{-1}$  (ovvero la matrice che ha per colonne i vettori che hanno generato il cubo), ma si può usare direttamente il valore di  $t$  appena ricavato, nella formula iniziale 1.7.



## 1.2 Collisioni con superfici mobili

Nel caso di superfici che cambiano la loro orientazione nel tempo, è necessario, per applicare il procedimento precedente, calcolare la matrice di trasformazione  $T$  ogni movimento della superficie interessata.

Prendiamo il solito sistema e vediamo che

$$\begin{cases} \vec{r} = T(\vec{y} - \vec{p}) \\ \vec{y} = \vec{x} + t\vec{v} \end{cases} \quad (1.11)$$

non è strettamente necessario calcolare  $T$ , ma ci potremo accontentare della sua inversa  $T^{-1}$  che noi conosciamo senza bisogno di calcoli (vedi 1.4). Il sistema diventa dunque

$$T^{-1}\vec{r} = \vec{z} + t\vec{v} \quad (1.12)$$

dove  $T^{-1} = [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}]$  (i vettori dati) e  $\vec{r} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

La trasformazione è sempre lineare, ed è dunque possibile proiettarla lungo gli assi e valutare  $t$  nei 6 casi di rilievo.

Per ognuna delle 6 facce bisogna eseguire il procedimento esemplificato per il caso dell'asse  $\gamma = 0$  e  $\alpha, \beta \in [0 \dots 1]$ .

Anche stavolta ci siamo ricondotti a un sistema in 3 equazioni in 3 incognite.

Svolgendo le equazioni per ogni asse:

$$v_i t = \alpha a_i + \beta b_i - z_i \quad (1.13)$$

ovvero

$$\begin{aligned} \alpha(a_0 - a_1) + \beta(b_0 - b_1) &= z_0 - z_1 \\ \alpha(a_1 - a_2) + \beta(b_1 - b_2) &= z_1 - z_2 \end{aligned} \quad (1.14)$$

e infine risolvendo, calcolando prima il denominatore per verificare che sia diverso da zero (e che i vettori non siano dunque paralleli e perciò non intersecanti), otteniamo

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(b_1 - b_2)(z_0 - z_1) - (b_0 - b_1)(z_1 - z_2)}{(b_1 - b_2)(a_0 - a_1) - (b_0 - b_1)(a_1 - a_2)} = \frac{A}{\Delta} \\ \beta &= \frac{(x_1 - x_2)(a_0 - a_1) - (z_0 - z_1)(a_1 - a_2)}{(b_1 - b_2)(a_0 - a_1) - (b_0 - b_1)(a_1 - a_2)} = \frac{B}{\Delta} \end{aligned} \quad (1.15)$$

se  $\alpha \in [0 \dots 1]$  e  $\beta \in [0 \dots 1]$  allora c'è intersezione e si può infine trovare (prendendo l'asse  $i$ -esimo a scelta, tale che  $v_i$  non sia zero) il fattore distanza:

$$t = \frac{\alpha a_i + \beta b_i - z_i}{v_i} \quad (1.16)$$

## 6 CAPITOLO 1. CONTROLLI DI COLLISIONE CON PARALLELEPIPEDI

Caso  $\gamma = 1$  e  $\alpha, \beta \in [0 \dots 1]$ .

La risoluzione è molto simile alla precedente, infatti la proiezione sugli assi si può scrivere come

$$v_i t = \alpha a_i + \beta b_i - (z_i - c_i) \quad (1.17)$$

e usare lo stesso procedimento discusso in precedenza, con la sostituzione  $\vec{z}' = \vec{z} - \vec{c}$ , notando anche che  $\Delta$  non si modifica.

Peso computazionale?

45 somme

42 moltiplicazioni

18 divisioni

12 confronti.

Per confronto, il peso computazionale del procedimento discusso nel paragrafo precedente, comprensivo del calcolo della matrice inversa, è:

29 somme

39 moltiplicazioni

11 divisioni

6 confronti,

leggermente inferiore.

# Capitolo 2

## collisioni con sfere

Con sfere il problema della collisione si semplifica in maniera netta, in quanto essa è definita solamente da un vettore al suo centro  $\vec{p}$  e un raggio  $r$ . Un punto  $\vec{x}$  è all'interno della sfera se

$$\|\vec{x} - \vec{p}\| \leq r \quad (2.1)$$

ovvero, per risparmiare il calcolo delle radici nella norma:

$$\sum_i (x_i - p_i)^2 \leq r^2 \quad (2.2)$$

Usando direttamente  $r^2$  come termine di confronto, il numero di operazioni necessarie sono

3 moltiplicazioni

5 somme

1 confronto

### 2.1 Ray Casting

Le cose in questo caso, si complicano maggiormente rispetto ai rettangoli. Concettualmente è sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} \|\vec{y} - \vec{p}\|^2 \leq r^2 \\ \vec{y} = \vec{x} + t\vec{v} \end{cases} \quad (2.3)$$

che ammette due soluzioni (quella di ingresso nella sfera, e quella di uscita). È in ogni caso un sistema di secondo grado, che, definendo  $\vec{c} = \vec{x} - \vec{p}$ , si può scrivere l'equazione come:

$$t^2 \|\vec{v}\|^2 + 2t\vec{c} \cdot \vec{v} + \|\vec{c}\|^2 - r^2 = 0 \quad (2.4)$$

e di soluzione:

$$t = \frac{-\vec{c} \cdot \vec{v} \pm \sqrt{(\vec{c} \cdot \vec{v})^2 - \|\vec{v}\|^2(\|\vec{c}\|^2 - r^2)}}{\|\vec{v}\|^2} = \frac{-\vec{c} \cdot \hat{v} \pm \sqrt{(\vec{c} \cdot \hat{v})^2 - \|\vec{c}\|^2 + r^2}}{\|\vec{v}\|} \quad (2.5)$$

abbastanza pesante dal punto di vista computazionale.

Possiamo fare comunque diverse approssimazioni. Per esempio se  $\|\vec{c}\| \gg r$ , è ovvio che le due intersezioni siano molto vicine, e si possono approssimare con il loro valore medio:

$$t \simeq \frac{\vec{c} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} = \frac{\vec{c} \cdot \hat{v}}{\|\vec{v}\|} \quad (2.6)$$

e perciò per verificare che una intersezione avvenga, si può inizialmente pre-calcolare questi valori, valori che comunque serviranno anche per calcolare l'intersezione precisa se sarà necessario.

La norma di  $\vec{v}$  si può precalcolare al momento della sua definizione (in fondo è una costante con cui moltiplicare  $t$ ) e perciò non pesa sui conti (si può pensare che  $\vec{v}$  abbia per esempio norma unitaria e rappresenti più che una velocità, una direzione). Usiamo perciò la forma di spostamento descritta in 1.8, indicando con uno scalare  $v$  la velocità e con un vettore  $\hat{d}$  la direzione.

L'equazione 2.5 si può riscrivere come:

$$vt = \vec{c} \cdot \hat{d} \pm \sqrt{(\vec{c} \cdot \hat{d})^2 - \|\vec{c}\|^2 + r^2} \quad (2.7)$$

e la 2.6

$$0 \leq vt \simeq \vec{c} \cdot \hat{d} \leq \|\vec{c}\| \quad (2.8)$$

Tornando alle approssimazioni, vediamo che, quando l'angolo tra  $\vec{v}$  e  $\vec{c}$  è piccolo, si possono trascurare i termini sotto radice, e in questo caso viene la ovvia soluzione:

$$vt \simeq \vec{c} \cdot \hat{d} \pm r \leq \|\vec{c}\| + r \quad (2.9)$$

Anche se simbolicamente più semplice, va ricordato che il calcolo di  $\|\vec{c}\|$  richiede l'esecuzione di una radice.

Il peso dei calcoli a grande distanza è

5 (o 6) somme

3 moltiplicazioni

1 divisione

mentre a corta distanza è

8 somme

5 moltiplicazioni

1 divisione

una radice

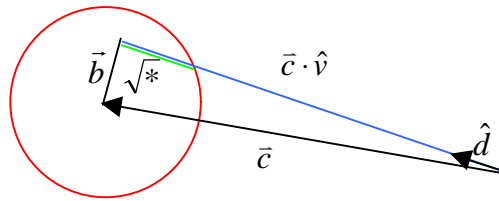
Possiamo poi cercare una approssimazione (seppur molto imprecisa) anche a corta distanza. Estraiendo  $r$  (che in questo caso sarà molto grande) dalla radice:

$$vt = \vec{c} \cdot \hat{d} \pm r \sqrt{\frac{(\vec{c} \cdot \hat{d})^2 - \|\vec{c}\|^2}{r^2} + 1} \quad (2.10)$$

e approssimando con Taylor la radice stessa (l'argomento sarà vicino a 1):

$$vt = \vec{c} \cdot \hat{d} \pm \left( r + \frac{(\vec{c} \cdot \hat{d})^2 - \|\vec{c}\|^2}{2r} \right) \quad (2.11)$$

Va comunque notato che, in ogni caso, rimuovendo la radice si perde sempre l'informazione se la collisione ci sarà, oppure meno. Se la collisione c'è, allora vuol dire che si sta guardando verso la Bounding Box, e perciò l'approssimazione a piccolo angolo 2.9 può già andare bene. È anche vero che se si perdono cicli nel calcolare l'argomento della radice per valutare l'intersezione, tanto vale a questo punto finire il calcolo.



Se si esamina la parte sotto radice dell'equazione si vede che sono grandezze nella forma del teorema di Pitagora. Per verificare che ci sia intersezione, è sufficiente calcolare la lunghezza del vettore  $\vec{b}$  e compararla con  $r^2$ :

$$\|\vec{b}\|^2 = \|\vec{c}\|^2 - (\vec{c} \cdot \hat{d})^2 \quad (2.12)$$

Per fare solo questo passo (determinare se c'è possibilità di intersezione o meno) sono necessarie

6 somme

7 moltiplicazioni

Determinato comunque il valore di  $\|\vec{b}\|^2$  con 2.12 è possibile continuare, calcolando la distanza di intersezione in maniera precisa come:

$$vt = \vec{c} \cdot \hat{d} \pm \sqrt{r^2 - \|\vec{b}\|^2} \quad (2.13)$$

Oltre al primo passo sono necessarie ulteriori:  
2 somme  
1 radice

# Capitolo 3

## Intersezioni con piani generici

L'equazione generica di un piano di normale  $\hat{n}$  è

$$\hat{n} \cdot \vec{x} = d \quad (3.1)$$

dove, quando  $d = 0$  il piano passa per l'origine.

Se il piano è correttamente orientato (secondo la direzione della normale  $\hat{n}$ ) si può verificare che un punto è interno o esterno allo spazio delimitato dal piano semplicemente verificando che

$n_0x_0 + n_1x_1 + n_2x_2 - d > 0$  fuori dal piano

$n_0x_0 + n_1x_1 + n_2x_2 - d < 0$  dentro al piano

Per trovare il punto di intersezione è necessario risolvere il solito sistema

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot \vec{y} = d \\ \vec{y} = \vec{x} + t\vec{v} \end{cases} \quad (3.2)$$

da cui la semplice soluzione per  $t$ :

$$t = \frac{d - \hat{n} \cdot \vec{x}}{\hat{n} \cdot \vec{v}} \quad (3.3)$$

dal cui valore si ottiene  $\vec{y}$  di conseguenza dall'equazione del moto.

Dove valgono le solite considerazioni della positività stretta di  $t$  per evitare le collisioni. L'angolo compreso tra  $\vec{x}$  e  $\hat{n}$  è (si possono risparmiare le radici delle norme, elevando tutto al quadrato e tabulando i valori di  $\cos$ ).

### 3.1 Intersezioni tra una sfera e un piano

E' possibile ricavare la distanza  $r$  tra un punto  $\vec{x}$  e il piano semplicemente calcolando:

$$r = \vec{x} \cdot \hat{n} - d \quad (3.4)$$

in quanto la 3.4 è la soluzione del sistema 3.2 scritto nella forma:

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot \vec{y} = d \\ \vec{y} = \vec{x} - r\hat{n} \end{cases} \quad (3.5)$$

Calcolare la distanza di un punto da un piano, permette di verificare se una sfera che circonda il punto interseca o meno il piano, o semplicemente per fare stime della possibilità o meno di collisione.

### 3.2 Ricavare i parametri caratteristici di un piano

Per ottenere i parametri  $\hat{n}$  e  $d$  sono necessari 3 punti (o vertici) del piano. Dati infatti 3 punti  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  passa un solo piano, per cui è necessario che siano soluzioni dell'equazione 3.1, e dunque, per ricavare i parametri descrittivi del piano, è necessario risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot \vec{a} = d \\ \hat{n} \cdot \vec{b} = d \\ \hat{n} \cdot \vec{c} = d \end{cases} \quad (3.6)$$

e, per ottenere la 4 equazioni, bisogna imporre la condizione  $\hat{n} = 1$ . Possiamo tuttavia calcolare un  $\vec{n}$  non normalizzato e poi, normalizzarlo, ricordandosi di modificare di conseguenza  $d$ . Calcoliamo perciò  $\vec{n} = \frac{\hat{n}}{d}$ .

Raggruppando in matrici e usando la formula della matrice inversa si ottiene:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{bmatrix}^{-1} \cdot (1 \quad 1 \quad 1) \quad (3.7)$$

Risolvendo otteniamo:

$$\begin{cases} n_0 = (c_2b_2 - c_1b_2) + (c_1a_2 - c_2a_1) + (b_2a_1 - b_1a_2) \\ n_1 = -b_2(a_0 - c_0) + c_2(a_0 - b_0) - a_2(c_0 - b_0) \\ n_2 = b_1(a_0 - c_0) - c_1(a_0 - b_0) + a_1(c_0 - b_0) \\ \Delta = a_0(c_2b_2 - c_1b_2) + b_0(c_1a_2 - c_2a_1) + c_0(b_2a_1 - b_1a_2) \end{cases} \quad (3.8)$$

da cui si ricava  $\hat{n} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$  e  $d = \frac{\|\vec{n}\|}{\Delta}$ .

Dati 3 punti, per ricavare il piano di appartenenza, sono dunque necessari:

14 somme

15 moltiplicazioni



### 3.3 Intersezioni con un triangolo (o un quadrato)

Solitamente è necessario calcolare le sole intersezioni tra la retta e un triangolo (o un quadrato) per verificare che ci sia stata collisione. È subito chiara la necessità di procedere come per il cubo, e in quanto tale bisogna ricavare la matrice di trasformazione dello spazio, la trasformazione che porta i vettori del triangolo in un set di vettori ortonormali. Prendiamo un vettore che punta a un vertice del triangolo (o del quadrato) e usiamolo come vettore scostamento  $\vec{p}$  e ricaviamo come primi vettori della trasformazione, i due vettori coincidenti con i lati del triangolo (o del quadrato) adiacenti allo spigolo scelto, in maniera da ottenere il sistema:

$$\begin{cases} T \cdot \vec{a} = \vec{e}_0 \\ T \cdot \vec{b} = \vec{e}_1 \end{cases} \quad (3.9)$$

Per completare la trasformazione bisogna scegliere un ulteriore vettore dello spazio, linearmente indipendente rispetto ai primi due. Se si usa la tecnica discussa in precedenza per superfici non statiche nel caso  $\gamma = 0$ , non è necessario calcolare tale valore, mentre se si usa il sistema della matrice inversa, è necessario completare la base della trasformazione (si potrebbe usare  $\vec{a} \times \vec{b}$  che sicuramente è ortogonale). Ricordarsi sempre che se si parla di triangoli i limiti per verificare l'intersezione saranno  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$  e  $\alpha + \beta \leq 1$ .



# Appendice A

## Matrice inversa

Data una matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

la matrice inversa è

$$\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \\ a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} \\ a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

dove  $\Delta = \det = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{33}a_{12} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$

Per completezza, il peso computazionale dell'inversione di una matrice 3x3 è  
11 somme  
21 moltiplicazioni  
9 divisioni



# Appendice B

## Prodotto vettoriale

È un particolare prodotto tra due vettori che si può applicare solo negli spazi di  $\mathbb{R}^3$ . Il vettore risultante è perpendicolare a entrambi i vettori di partenza e di norma uguale all'area descritta dal parallelogramma che ha come due lati i vettori dati.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = (a_1b_3 - a_3b_1, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \quad (\text{B.1})$$

per calcolare il prodotto vettoriale sono dunque necessarie:

3 somme

6 moltiplicazioni